複素領域における線型偏微分方程式の特異点をもつ解の増大度と漸近展開(複素領域の偏微分方程式)

大内, 忠

数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 21-24

複素領域における線型偏微分方程式の特異点をもつ解の増大度と漸近展開

Growth property and asymptotic expansion of singular solutions of linear partial differential equations in the complex domain

上智大学 数学 (Sophia Univ.)
大内 忠 (Sunao OUCHI)

0. 序

複素領域の偏微分方程式の特異点をもつ解の存在については、[1], [2], [4], [8] 等の論文があり、かなり研究されている。この小論の目的は解の特異点の近傍での挙動を調べることである。

$P(z,\partial)$ を原点の近傍で定義された正則な関数を係数とする線型偏微分作用素とする。方程式

$$P(z,\partial)u(z)=f(z)$$

を考える。ここで $u(z), f(z)$ は $\{z_0=0\}$ 上に特異点を許容し, $f(z)$ はある角領域で z_0について Gevrey 的 漸近展開をもつとする.

ある class の $P(z,\partial)$ に対して, 指数$\gamma^*>0$があって $\forall\varepsilon>0$ に対して $|u(z)|\le C_\varepsilon\exp(\varepsilon|z_0|^{-\gamma^*})$ ならば, $u(z)$ も 同様の漸近展開をもつことを示す。

ここで述べる定理は [5], [6] の結果の拡張である。そこでは解の積分表示式を詳しく解析することにより得られた。そのために作用素にたいして、特性多角形 (Newton 多角形) を定義して、これを用いて条件を科した。ここではより簡単な条件で定理を与え、特性多角形を表に出さない。また証明は解の微分係数を評価するという簡明な方法である。

1. 定義と定理

まず 記号を定義しよう。$z=(z_0,z_1,\cdots,z_n)=(z_0,z')\in \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}^n$, $\partial_i=\partial/\partial z_i$, $\partial=(\partial_0,\partial_1,\cdots,\partial_n)=(\partial_0,\partial')$. $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_0,\alpha')\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^n$ を多重指数とする, $\boldsymbol{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

$\Omega=\Omega_0\times\Omega'$ を原点を中心とする多重円板, $\Omega_0\subset\boldsymbol{C}$, $\Omega'\subset\boldsymbol{C}^n$. $\Omega_0(\theta)=\{z_0\in\Omega_0-\{0\};\ |\arg z_0|<\theta\}$ とし、z_0 についての扇形領域 $\Omega(\theta)$ を$\Omega(\theta):=\Omega_0(\theta)\times\Omega'$ と定義する。

Ω で正則な関数の全体を $\mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega(\theta)$ で正則な関数の全体を $\mathcal{O}(\Omega(\theta))$ で表す。この論文では次の形の $\mathcal{O}(\Omega)$ を係数とする m 階線形偏微分作

用素を取り扱う：

$$(1.1)\qquad P(z,\partial) := (\frac{\partial}{\partial z_0})^{k^*} - \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\(\alpha_0,\alpha')\neq(k^*,0)}} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^{\alpha},$$

$a_\alpha(z) = z_0^{j_\alpha} b_\alpha(z)$, $b_\alpha(0,z') \not\equiv 0$, $j_\alpha \in \boldsymbol{N}$ とし、$a_\alpha(z) \equiv 0$ のときは、$j_\alpha = +\infty$ とする。

ここでは作用素 $P(z,\partial)$ は次の *Condition 0* を満たすとする。

Condition 0. $\alpha \neq (k^*,0,0,\cdots,0) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^n$ ならば $j_\alpha - \alpha_0 + k^* > 0$.

作用素 $P(z,\partial)$ に対して $\{z_0 = 0\}$ に関する Minimal irregularity ([3], [7] 参照) を次で定義する。

定義 1.1. (Minimal irregularity)

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \gamma = \min\{\dfrac{j_\alpha - \alpha_0 + k^*}{|\alpha| - k^*};\ \alpha\ with\ |\alpha| > k^*\} & \text{if } k^* < m,\\ \gamma = +\infty \quad \text{if } k^* = m. \end{cases}$$

Condition 0 を満たす作用素をあげよう。

例 ∂_0について正規型の作用素は *Condition 0* を満たす。

$$(1.3)\qquad \partial_0^2 + \partial_1^3\partial_0 + \partial_1^5 \qquad k^* = 2\ \gamma^* = 1/2,$$

$$(1.4)\qquad \partial_0^{k^*} + z_0^j\partial_1^m\ \ (k^* < m) \qquad \gamma^* = \frac{k^* + j}{m - k^*}.$$

∂_0について正規型でない作用素の例としては

$$(1.5)\qquad I_d + z_0^2\partial_0 + z_0\partial_1^2 \qquad k^* = 0,\ \gamma^* = 1/2.$$

序で述べた内容を正確に記述するために $\mathcal{O}(\Omega(\theta))$ の部分空間 $\mathcal{O}_{(\kappa)}(\Omega(\theta))$ と $Asy_{\{\kappa\}}(\Omega(\theta))$ を導入しよう。

定義 1.2. $\mathcal{O}_{(\kappa)}(\Omega(\theta))$ $(0 < \kappa \le +\infty)$

(i) $0 < \kappa < +\infty$.　$u(z) \in \mathcal{O}(\Omega(\theta))$ で任意の$\varepsilon > 0$ と任意のθ', $0 < \theta' < \theta$, に対してある $C = C(\varepsilon,\theta') > 0$ があって

$$(1.6)\qquad |u(z)| \le C\exp(\varepsilon|z_0|^{-\kappa}) \quad z \in \Omega(\theta').$$

(ii) $\kappa = +\infty$.　$\mathcal{O}_{(+\infty)}(\Omega(\theta)) = \mathcal{O}(\Omega(\theta))$.

この空間は関数の特異点増大度として、ある order の指数的増大度を許容する空間である。

定義 1.3. $Asy_{\{\kappa\}}(\Omega(\theta))$ $(0 < \kappa \le +\infty)$ は以下に述べる漸近展開をもつ $u(z) \in \mathcal{O}(\Omega(\theta))$ の全体である：

$\forall\theta'$, $0<\theta'<\theta$ と $\forall N\in\boldsymbol{N}$ にたいして $A=A(\theta')$ と $B=B(\theta')$ があって、

$$(1.7)\qquad |u(z)-(\sum_{k=0}^{N-1}u_k(z')z_0^k)|\le AB^N\Gamma(N/\kappa+1)|z_0|^N \quad in\,\Omega(\theta'),$$

が成り立つ。ここで $u_k(z')\in\mathcal{O}(\Omega')$ である。

$Asy_{\{\kappa\}}(\Omega(\theta))$ は z_0について Gevrey 的漸近展開を持つ空間である。さて

$$(\mathrm{Eq})\qquad P(z,\partial)u(z)=f(z)$$

を考える。$u(z),f(z)\in\mathcal{O}(\Omega(\theta))$ とする。

定理 1.4. $P(z,\partial)$ は *Condition 0* を満たすとする。(Eq) において $u(z)\in\mathcal{O}_{(\gamma^*)}(\Omega(\theta))$, $f(z)\in Asy_{\{\gamma^*\}}(\Omega(\theta))$ とする。このとき 原点を中心とする多重円板 W があって, $u(z)\in Asy_{\{\gamma^*\}}(W(\theta))$ である。

2. 証明の概略

序で述べたように、定理を示すために解 $u(z)$ の z_0についての微分係数を評価する。

命題 2.1. $u(z)\in\mathcal{O}_{(\gamma)}(\Omega(\theta))$ を (Eq) の解とする。$\forall\theta', 0<\theta'<\theta$, と $\forall\varepsilon>0$ にたいして、正の定数 $C=C(\varepsilon,\theta')$、$B=B(\theta')$ と原点を中心とする多重円板 W が存在して、$z\in W(\theta')$ にたいして

$$(2.1)\qquad |\partial_0^n u(z)|\le C\exp(\varepsilon|z_0|^{-\gamma^*})B^n\Gamma((1+1/\gamma^*)n+1)$$

$n=0,1,2,\cdots$. が成り立つ。

この 命題の証明は解 $u(z)$ を z_0について微分することにより得られる。(1.3) のような型の方程式については難しくない。 しかし (1.4) や, 特に (1.5) のような z_0について正規型でない作用素にたいしては工夫を要する。定理を示すためにさらに次の補題を用いる。

補題 2.2. κを正の有理数とする。$v(t)$ は 1 変数 t 関数で、$v(t)\in\mathcal{O}(\Omega_0(\theta))$ とする。$v(t)$ にたいして 次の評価式が成り立っているとする:

$\forall\theta'$, $0<\theta'<\theta$, と $\forall\varepsilon>0$ にたいして定数 $C=C(\varepsilon,\theta')$ と $B=B(\theta')$ が存在して $\Omega_0(\theta')$ において

$$(2.2)\qquad |(\frac{d}{dt})^n v(t)|\le C\exp(\varepsilon|t|^{-\kappa})B^n\Gamma((1+1/\kappa)n+1)$$

$n=0,1,2,\cdots$ である。

このとき $v(t)\in Asy_{\{\kappa\}}(\Omega_0(\theta))$ である。

この命題と補題を組み合わせると定理は容易に得られる。この補題は $v(t)$ の Laplace 変換とある Fuchs 型の方程式の解の構造を調べることにより示される。κが有理数であることは $v(t)$ の Laplace 像 $\hat{v}(\xi)$ がある Fuchs 型偏微分方程式を満たすことに用いられる。

この補題はすべて正の実数κについて成り立つことを予想される。この予想は本多氏(北大)により、無限階微分作用素にたいするparametrixを用いると示すことができると示唆された。

—後記— 解が漸近展開できるという[5], [6]の結果の証明は長く極めて分かりにくかった。以前から、より分かりやすく出来ないかと考えていた。定理を述べるのに、特性多角形を用いずに、最上と考えられる条件を与えることができ、しかも極めて簡明な証明を与えることができたのは望外であった。

References

[1] Hamada, Y., Leray, J. et Wagschal, C., *System d'équation aux derivées partielles a caractéristic multiples; problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures Appl., 55 (1976), 297-352.

[2] Kashiwara, M. et Schpira, P.,*Problème de Cauchy pour les systemes microdifferentiels dans le domain complexe*, Inv. Math.m 46 (1978), 17-38.

[3] Ōuchi, S., *Index, localization and classification of characteristic surfaces for linear partial differential operators,* Proc. Japan Acad., 60, 189-192 (1984).

[4] Ōuchi, S., *Existence of singular solutions and null solutions for linear partial differential operators,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 32 (1985), 457-498.

[5] Ōuchi,S., *An integral representation of singular solutions and removable singularities to linear partial differential equations,* Publ. RIMS Kyoto Univ. 26, 735-783 (1990).

[6] Ōuchi, S., *The behaviour of solutions with singularities on a characteristic surface to linear partial differential equations in the complex domains,* Publ. RIMS Kyoto Univ. 29, 63-120 (1993).

[7] Ōuchi, S., *Genuine solutions and formal solutions with Gevrey type estimates of nonlinear partial defferntial equations* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 2 (1995), 375-417.

[8] Persson, J., *Singular holomorphic solutions of linear partial differential equations with holomorphic coefficients and nonanalytic solutions with analytic coefficients,* Asterisque 89-90, analytic solutions of partial differerntial equations (Trento 1981), Soc Math. France, 233-247.